## OPCIÓN A

### Ejercicio 1 de la opción A del modelo 7 de 1997.

La función f : R → R definida por $f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si} \quad x \le 1, \\ \dfrac{2}{kx} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ es derivable en todo su dominio.

(a) ¿ Cuanto vale k? ¿Cuánto vale f ' (1)? Justifica las respuestas

(b) Para el valor de k hallado en el apartado anterior, dibuja la región limitada por la gráfica de la función f, el eje OX, el eje OY y la recta x = 2

(c) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior..

**Solución**

(a)

Como la función es derivable en todo su dominio en derivable en x = 1, y por tanto también es continua en x = 1. Utilizaremos estas dos condiciones para calcular k

Como es continua en x = 1

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$, y sustituyendo nos queda (3 – k) = 2/k, de donde $k^2 - 3k + 2 = 0$. Resolviendo nos queda k = 1 y k = 2.

Como es derivable

$$f\,'(x) = \begin{cases} -2kx & si \quad x \le 1, \\ \dfrac{-2}{kx^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Como es derivable en x = 1, tenemos que $f\,'(1^+) = f\,'(1^-)$

$f\,'(1^+) = \lim_{x \to 1+} f\,'(x) = \lim_{x \to 1+} (-2/kx^2) = -2/k$

$f\,'(1^-) = \lim_{x \to 1-} f\,'(x) = \lim_{x \to 1-} (-2kx) = -2k$

Igualando tenemos –2k = -2/k, es decir $k^2 = 1$, de donde $k = \pm 1$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, el único resultado posible es k = 1

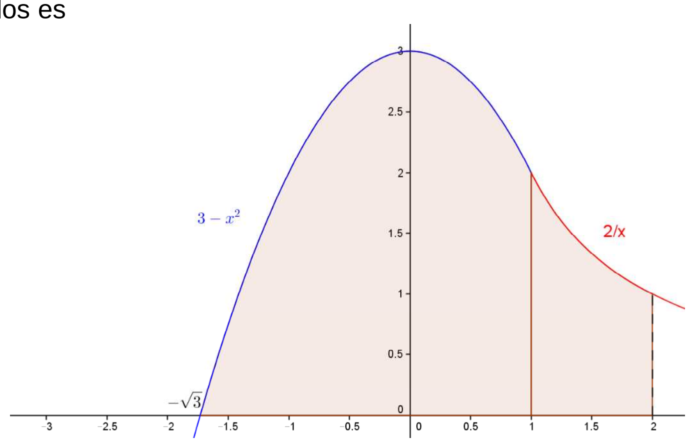
(b)

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & si \quad x \le 1, \\ \dfrac{2}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

la función $3 - x^2$ es una parábola desplazada 3 unidades hacia arriba en el eje OY, pero con las ramas hacia abajo

La función 2/x es una hipérbola equilátera, que tiene por asíntotas x = 0 e y = 0

La gráfica pedida en esos intervalos es




(c)

Para hallar el área hay que tener en cuenta que la función cambia en el punto x = 1

$$Area = \int_0^1 (3 - x^2)dx + \int_1^2 \frac{2}{x}dx = \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + [2\ln(x)]_1^2 = 3 - ½ + 2\ln(2) - 2\ln(1) = 5/2 + 2\ln(2) \text{ u.a.}$$

### Ejercicio 2 de la opción A del modelo 7 de 1997.

Se considera la función f : [1, + ∞) → ℜ definida por $f(x) = |x - 2| + \sqrt{x - 1}$

Calcula, de manera razonada, su función derivada.

**Solución**

$$f(x)=|x-2|+\sqrt{x-1}=\begin{cases} x-2+\sqrt{x-1} & si \quad x\ge 2 \\ -x+2+\sqrt{x-1} & si \quad 1\le x<2 \end{cases}$$

$$f\ '(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & si \quad x>2 \\ -1+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & si \quad 1<x<2 \end{cases}$$

Tenemos que ver si existe f ' (2), es decir si f '($2^+$) = f '($2^-$)

f '($2^+$) = $\lim_{x\to 2+}$ f '(x) = $\lim_{x\to 2}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right]$ = 1 + ½ = 3/2

f '($2^-$) = $\lim_{x\to 2-}$ f '(x) = $\lim_{x\to 2}\left[-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right]$ = - 1 + ½ = -1/2

Como f '($2^+$) ≠ f '($2^-$), no existe f '(2).

**Ejercicio 3 de la opción A del modelo 7 de 1997.**

Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$, calcula de forma razonada el valor de los siguientes determinantes sin desarrollarlos:

$$\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

**Solución**

$$\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5.5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5.5.1=25$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

lo cual se obtiene multiplicando la primera fila por .2 y sumándola a la segunda. A continuación se multiplica la primera fila por – 1 y se suma a la tercera.

**Ejercicio 4 de la opción A del modelo 7 de 1997.**

Considera el punto P = ( 1, 0, -1 ) y la recta de ecuaciones $r\equiv\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

(a) Halla la distancia del punto P a la recta r.
(b) Determina el plano que pasa por P y contienen a la recta r

**Solución**

(a)

Para hallar la distancia del punto P a la recta r calculo el plano perpendicular a la recta por el punto P, y después halo la intersección de dicho plano con la recta que me da el punto Q, y la distancia pedida es la distancia del punto P al punto Q.

Ponemos la recta

$$r\equiv\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

en paramétricas. Tomando y = $\lambda$, obtenemos x = -$\lambda$ y z = 1. Un vector director de la recta r es **v** = (-1,1,0)

El plano $\Pi$ perpendicular a la recta tiene como vector normal el director de la recta, es decir **n** = **v** = (-1,1,0), y pasa por el punto P

$\Pi \equiv$ -1(x-1) + 1(y-0) + 0(z+1) = 0, simplificando queda –x + y + 1 = 0

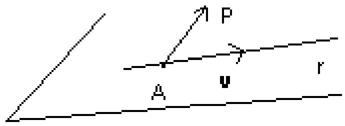
Calculamos Q intersección de $\Pi$ con r

- (-$\lambda$) + $\lambda$ + 1 = 0, de donde $\lambda$ = - ½, con lo cual Q( -( -1/2, -1/2, 0) = Q(1/2, -1/2, 0)

La distancia pedida es d(P,r) = d(P,Q) = $|$**PQ**$|$ = (1/4 + ¼ + 1 )$^{(1/2)}$ = $\sqrt{3/2}$

Pues **PQ** = (1/2 – 1, -1/2 1) = (-1/2, -1/2, 1)

(a)



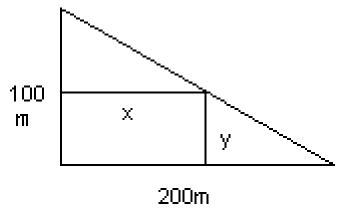

De la recta r tomo un punto A(0,0,1) y un vector director **v** = (-1,1,0), el plano pedido pasa por el punto A, y es paralelo a los vectores **v** y **AP** = (1,0,-2), pues P(1,0,-1) luego

$$\Pi \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \text{(x-0)(-2) – (y-0)(2) + (z-0)(-1) = -2x – 2y –z = 0}$$

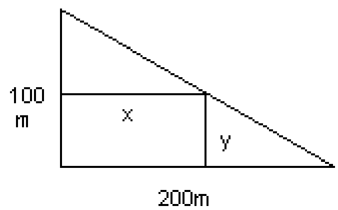
## OPCIÓN B

### Ejercicio 1 de la opción B del modelo 7 de 1997.

Sobre un terreno en forma de triángulo rectángulo cuyos catetos miden 100 m y 200 m respectivamente se quiere construir un edificio de planta rectangular como se muestra en la figura. Hallar las dimensiones que debe tener dicha planta par que su superficie sea máxima




**Solución**




La función a maximizar e s A = x.y

Por semejanza de triángulos tenemos 100 / 200 = y / (200-x), de donde y = ½.(200 – x)

A = x.y = ½.x.(200 – x) = ½.(200x – $x^2$)

A ‘ = ½.(200 – 2x)

A ‘ = 0, nos da x = 100, por lo que y = ½(200 – 100) = 50

Y como A ‘’ ½( - 2) < 0, efectivamente es un máximo.

### Ejercicio 2 de la opción B del modelo 7 de 1997.

Sea f : $\Re \rightarrow \Re$ la función definida por f(x) = $x^3$ – $3x^2$ +2.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en su punto de inflexión..

(b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f, la recta tangente en su punto de inflexión y el eje OY.

(c) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

**Solución**

(a)

El punto de inflexión anula la segunda derivada

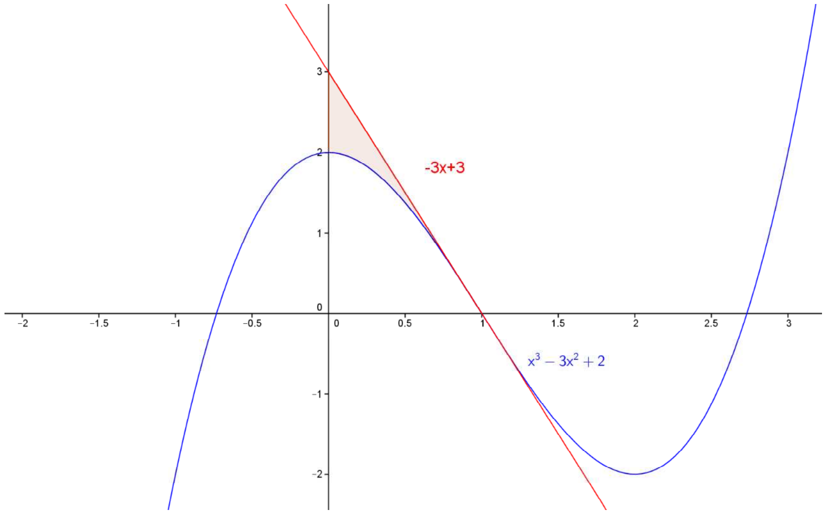
f(x) = $x^3$ – $3x^2$ +2

f ‘(x) = $3x^2$ – 6x

f ‘’(x) = 6x – 6

f ‘’(x) = 0, nos da x = 1

La recta tangente en x = 1 es y – f(1) = f ‘(1).(x-1).
Como f(1) = 0,  y  f ‘(1) = - 3 la recta tangente es
y – 0 = - 3.(x-1). Es decir y = -3x + 3
(b)
La función f(x) = $x^3 - 3x^2 + 2$, es una cúbica con
lim $_{x \to +\infty}$ f(x) = + ∞
lim $_{x \to -\infty}$ f(x) = - ∞
f(x) corta a los ejes en (1 + $\sqrt{3}$ , 0), (1,0) y (1 - $\sqrt{3}$ , 0), pues esas son las soluciones de f(x) = 0
Estudiamos f ‘(x)
f ‘(x) = $3x^2 - 6x$, f ‘(x) = 0, nos dá como soluciones x = 0, y x = 2
Como f ‘(x) > 0, si x < 0, la función f(x) es creciente en x < 0
Como f ‘(x) < 0, si 0 < x < 2, la función f(x) es decreciente en 0 < x < 2
Como f ‘(x) > 0, si x > 2, la función f(x) es creciente en x > 0
Por definición en x = 0 hay un máximo y en x = 2 un mínimo
El recinto limitado por la gráfica de la función f, la recta tangente en su punto de inflexión y el eje OY. Es el siguiente:




(c)
Para hallar el área del recinto descrito en el apartado anterior, tenemos en cuenta que coinciden en el punto x = 1, pues es el punto en el cual hemos calculado su recta tangente:

$$Area = \int_0^1 \left[(-3x+3) - (x^3 - 3x^2 + 2)\right]dx = \left[\frac{-x^4}{4} + x^3 - \frac{3x^2}{2} + x\right]_0^1 = -1/4 + 1 - 3/2 + 1 = 1/4 \text{ u.a.}$$

**Ejercicio 3 de la opción B del modelo 7 de 1997.**

De las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, se sabe que $A.B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
(a) ¿Tiene A inversa ? Justifica la respuesta y si la respuesta es afirmativa cuál es la inversa de A.
(b) ¿Es cierto que A.B = B.A en este caso?

**Solución**

(a)

$$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.I$$

Como |A.B| = |A|.|B| = 9 ≠ 0, ninguno de los dos número |A| y |B| puede ser cero luego |A| ≠ 0, y la matriz A tiene inversa.
(b)
Veamos si que A.B = B.A

$$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.I$$

A.B = 3I, y como existe $A^{-1}$ y $B^{-1}$
$A^{-1}$.(A.B) = 3$A^{-1}$.I = 3.$A^{-1}$
I.B = 3.$A^{-1}$, de donde $A^{-1}$ = 1/3.B

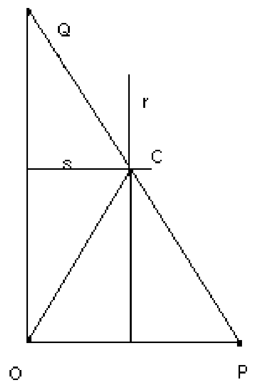
$B.A = 1/3.B.3A = A^{-1}.3.A = 3\ I = A.B$
Luego en este caso coinciden.

**Ejercicio 4 de la opción B del modelo 7 de 1997.**

(a) Sean P y Q dos puntos del plano situados, respectivamente, en los ejes OX y OY que son distintos del origen de coordenadas O. ¿Cuántas circunferencias pasan simultáneamente por O, P y Q? Justifica la respuesta
(b) Describe un procedimiento geométrico para calcular una circunferencia de las mencionadas anteriormente.
(c) Aplica el procedimiento descrito para calcular el centro y el radio de una circunferencia que pasa por los puntos P=(2,0), Q = (0,2) y O = (0,0).

**Solución**

(a)




Solo se puede trazar una circunferencia, pues si trazamos la mediatriz del segmento OP, y la mediatriz del segmento OQ, se cortan en un punto C, que equidista de O, de P y de Q y es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos O, P y Q
(b)
El procedimiento geométrico ya lo he explicado en el apartado (a)
(c)
P = ( 2, 0 ), Q = ( 0, 2 )
El punto medio del segmento OP es M(1,0)
El punto medio del segmento OQ es N(0,1)
**OP** = (2,0). Un vector normal es **v** = (0,-2)
Sea r la recta perpendicular al segmento OP que pasa por M(1,0)
La recta r tiene de ecuación (x-1)/0 = (y-0)/(-2). Es decir la ecuación x = 1
**OQ** = (0,2). Un vector normal es **w** = (-2,0)
Sea s la recta perpendicular al segmento OQ que pasa por N(0,1)
La recta s tiene de ecuación (x-0)/-2 = (y-1)/0. Es decir la ecuación y = 1
Luego el centro de la circunferencia es la intersección de las recta x = 1 e y = 1 , es decir el punto C(1,1).
El radio es $d(O,C) = d(C,P) = d(C,Q) = (1 + 1)^{(1/2)} = \sqrt{2}$
Es decir la circunferencia pedida es $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$